## 2. 常系数线性非齐次方程

二阶常系数线性非齐次微分方程：

$$y'' + p y' + q y = f(x) \quad (p, q \text{ 为常数}) \qquad ①$$

根据解的结构定理，其通解为

$$y = \underbrace{Y}_{\text{齐次方程通解}} + \underbrace{y^*}_{\text{非齐次方程特解}}$$

求特解的方法 — 待定系数法

根据 $f(x)$ 的特殊形式，给出特解 $y^*$ 的待定形式，

代入原方程比较两端表达式以确定待定系数 .

$$y'' + py' + qy = f(x) \quad (p, q \text{ 为常数})$$

（1）$f(x) = e^{\lambda x} P_m(x)$ 型

$\lambda$ 为实数，$P_m(x)$ 为 $m$ 次多项式．

$$P_m(x) = a_m x^m + a_{m-1} x^{m-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

$$P_m'(x) = m a_m x^{m-1} + (m-1) a_{m-1} x^{m-2} + \cdots + a_1$$

$$P_m''(x) = m(m-1) a_m x^{m-2} + (m-1)(m-2) a_{m-1} x^{m-3} + \cdots + 2a_2$$

每求一次导数，次数降低一次

$y'' + py' + qy = f(x)$ （$p, q$ 为常数)

（1）$f(x) = e^{\lambda x} P_m(x)$ 型

$\lambda$ 为实数，$P_m(x)$ 为 $m$ 次多项式．

设特解为 $y^* = e^{\lambda x} Q(x)$，其中 $Q(x)$ 为待定多项式，

$$y^{*\prime} = e^{\lambda x}[\lambda Q(x) + Q'(x)]$$

$$y^{*\prime\prime} = e^{\lambda x}[\lambda^2 Q(x) + 2\lambda Q'(x) + Q''(x)]$$

代入原方程，得

$$Q''(x) + (2\lambda + p)Q'(x) + (\lambda^2 + p\lambda + q)Q(x) = P_m(x)$$

(1) 若 $\lambda$ 不是特征方程的根，即 $\lambda^2 + p\lambda + q \neq 0$，则取 $Q(x)$ 为 $m$ 次待定系数多项式 $Q_m(x)$，从而得到特解形式为 $y^* = e^{\lambda x} Q_m(x)$．

$$Q''(x)+(2\lambda+p)Q'(x)+(\lambda^2+p\lambda+q)Q(x)=P_m(x)$$

(2) 若$\lambda$是特征方程的单根，即

$$\lambda^2+p\lambda+q=0,\quad 2\lambda+p\neq 0,$$

则$Q'(x)$为$m$次多项式，故特解形式为 $y^*=xQ_m(x)e^{\lambda x}$

(3) 若 $\lambda$ 是特征方程的重根，即

$$\lambda^2+p\lambda+q=0,\quad 2\lambda+p=0,$$

则$Q''(x)$是 $m$ 次多项式，故特解形式为$y^*=x^2Q_m(x)e^{\lambda x}$

**小结** 对方程①，当$\lambda$在特征根中出现$k$次时，可设

特解 $y^*=x^kQ_m(x)e^{\lambda x}\quad (k=0,1,2)$

此结论可推广到高阶常系数线性微分方程 .

**例1.** 求方程 $y''-2y'-3y=3x+1$ 的一个特解.

$$3x+1=e^{0x}P_1(x)$$

解：本题 $\lambda=0$，而特征方程为 $r^2-2r-3=0$，

$\lambda=0$ 不是特征方程的根 .

设所求特解为 $y^*=ax+b$，代入方程 ：

$$-3ax-3b-2a=3x+1$$

比较系数，得

$$\begin{cases}-3a=3\\-2a-3b=1\end{cases}\longrightarrow a=-1,\ b=\frac{1}{3}$$

于是所求特解为 $y^*=-x+\frac{1}{3}$.

例2. 求方程 $y''-5y'+6y=\underline{x e^{2x}}$ 的通解.

解:本题 $\underline{\lambda=2,}$ 特征方程为$r^2-5r+6=0$，其根为

$$\underline{r_1=2,}\quad r_2=3$$

对应齐次方程的通解为 $Y=C_1e^{2x}+C_2e^{3x}$

设非齐次方程特解为 $y^*=x(b_0x+b_1)e^{2x}$

代入方程得 $-2b_0x-b_1+2b_0=x$

比较系数, 得 $\begin{cases}-2b_0=1\\ 2b_0-b_1=0\end{cases}$ $\Longrightarrow$ $b_0=-\dfrac{1}{2},b_1=-1$

因此特解为 $y^*=x(-\frac{1}{2}x-1)e^{2x}$ .

所求通解为 $y=C_1e^{2x}+C_2e^{3x}-(\frac{1}{2}x^2+x)e^{2x}$ .

**例3.** 求方程 $y''-2y'+y=4xe^{x}$ 的通解.

解: 本题 $\lambda=1$, 特征方程为 $r^2-2r+1=0$,

其根为 $r_1=r_2=1$

对应齐次方程的通解为 $Y=(C_1+C_2x)e^{x}$

设非齐次方程特解为 $y^*=x^2(b_0x+b_1)e^{x}$

代入方程得 $6b_0x+2b_1=4x$

比较系数, 得 $\begin{cases} 6b_0=4 \\ 2b_1=0 \end{cases} \longrightarrow b_0=\dfrac{2}{3}, b_1=0$

因此特解为 $y^*=\dfrac{2}{3}x^3e^{x}$.

所求通解为 $y=C_1e^{x}+C_2xe^{x}+\dfrac{2}{3}x^3e^{x}$.

例4. 求解初始问题 $\begin{cases} y''' + 3y'' + 2y' = \underline{1} \\ y(0) = y'(0) = y''(0) = 0 \end{cases}$ $1 = e^{0x}P_0(x)$

解: 本题 $\underline{\lambda = 0,}$ 特征方程为 $r^3 + 3r^2 + 2r = 0$, 其根为

$$\underline{r_1 = 0,} \quad r_2 = -1, \quad r_3 = -2$$

故对应齐次方程通解为 $Y = C_1 + C_2 e^{-x} + C_3 e^{-2x}$

设非齐次方程特解为 $y^* = ax$, 代入方程得 $2a = 1$, 故

$y^* = \frac{1}{2}x$, 原方程通解为

$$y = C_1 + C_2 e^{-x} + C_3 e^{-2x} + \frac{1}{2}x$$

由初始条件得 $\begin{cases} C_1 + C_2 + C_3 = 0 \\ -C_2 - 2C_3 = -\frac{1}{2} \\ C_2 + 4C_3 = 0 \end{cases}$

解得 $\begin{cases} C_1 = -3/4 \\ C_2 = 1 \\ C_3 = -1/4 \end{cases}$

于是所求解为

$$y = -\frac{3}{4} + e^{-x} - \frac{1}{4}e^{-2x} + \frac{1}{2}x$$

$$= \frac{1}{4}(-3 + 2x + 4e^{-x} - e^{-2x})$$

---

**例4.求解初始问题** $\begin{cases} y''' + 3y'' + 2y' = 1 \\ y(0) = y'(0) = y''(0) = 0 \end{cases}$

$$y = C_1 + C_2 e^{-x} + C_3 e^{-2x} + \frac{1}{2}x$$

$$y'' + py' + qy = f(x) \quad (p, q \text{ 为常数})$$

(2) $f(x) = e^{\lambda x}[P_l(x)\cos\omega x + \tilde{P}_n(x)\sin\omega x]$ $(\omega \neq 0)$型

$P_l(x)$和$\tilde{P}_n$是两个多项式函数

当$\lambda + i\omega$在特征根中出现$k$次时，可设特解：

$$y^* = x^k e^{\lambda x}\left[R_m \cos\omega x + \tilde{R}_m \sin\omega x\right]$$

其中 $m = \max\{n, l\}$

$R_m$和$\tilde{R}_m$是两个不同的$m$次多项式函数

上述结论也可推广到高阶方程的情形.

**例5.** 求方程 $y'' + y = x\cos 2x$ 的一个特解 .

解: $x\cos 2x = e^{0x}[P_1(x)\cos 2x + \widetilde{P}_0(x)\sin 2x]$

$\lambda = 0, \omega = 2, \ P_l(x) = x, \ \widetilde{P}_n(x) = 0,$ 特征方程 $r^2 + 1 = 0$

$\lambda + i\omega = 2i$不是特征方程的根, 故设特解为

$$y^* = (ax + b)\cos 2x + (cx + d)\sin 2x$$

代入方程得

$$(-3ax - 3b + 4c)\cos 2x - (3cx + 3d + 4a)\sin 2x = x\cos 2x$$

比较系数, 得 $\begin{cases} -3a = 1 \\ -3b + 4c = 0 \\ -3c = 0 \\ -3d - 4a = 0 \end{cases}$ $\quad \therefore \ a = \frac{-1}{3}, \ d = \frac{4}{9}$

$$b = c = 0$$

于是求得一个特解 $y^* = \frac{-1}{3}x\cos 2x + \frac{4}{9}\sin 2x$ .

**例6.** 求方程 $y''+9y=18\cos 3x-30\sin 3x$ 的通解.

解: 特征方程为 $r^2+9=0$, 其根为 $r_{1,2}=\pm 3i$

对应齐次方程的通解为 $Y=C_1\cos 3x+C_2\sin 3x$

$$18\cos 3x-30\sin 3x=e^{0x}[P_0(x)\cos 3x+\widetilde{P}_0(x)\sin 3x]$$

$3i$ 为特征方程的单根, 因此设非齐次方程特解为

$$y^*=x(a\cos 3x+b\sin 3x)$$

代入方程: $\underline{6b}\cos 3x\underline{-6a}\sin 3x=\underline{18}\cos 3x\underline{-30}\sin 3x$

比较系数, 得 $a=5$, $b=3$,

因此特解为 $y^*=x(5\cos 3x+3\sin 3x)$

所求通解为

$$y=C_1\cos 3x+C_2\sin 3x+x(5\cos 3x+3\sin 3x)$$

**例7.** 求下列高阶常系数线性非齐次方程的特解形式:

$$(1)\quad y^{(4)}+2y''+y=\sin x$$

$$(2)\quad y^{(4)}+y''=\underline{x}+\underline{e^x}+\underline{3\sin x}$$

解:(1) 特征方程 $r^4+2r^2+1=0$, 即 $(r^2+1)^2=0$,

有二重根 $r=i$, 所以设非齐次方程特解为

$$y^*=x^2(a\cos x+b\sin x)$$

(2) 特征方程 $r^4+r^2=0$, 即 $r^2(r^2+1)=0$ 有根

$$r_{1,2}=0,\quad r_{3,4}=\pm i$$

利用叠加原理，可设非齐次方程特解为

$$y^*=x^2(ax+b)+c\,e^x+x(d\cos x+k\sin x)$$

# 三、欧拉方程

形如

$$x^n y^{(n)} + p_1 x^{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + p_{n-1} x y' + p_n y = f(x)$$

的方程(其中 $p_1, p_2 \cdots p_n$ 为常数) 叫欧拉方程.

**特点：** 各项未知函数导数的阶数与乘积因子自变量的次数相同.

**解法：** 欧拉方程是特殊的变系数方程，通过变量代换可化为常系数微分方程.

$$x^n y^{(n)} + p_1 x^{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + p_{n-1} x y' + p_n y = f(x)$$

作变量变换 $x = e^t$ 或 $t = \ln x$,

这里就在 $x > 0$ 范围求解，若要在 $x < 0$ 范围求解，

则作变换 $x = -e^t$ 或 $t = \ln(-x)$,可得类似结果

将自变量换为 $t$,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx} = \frac{1}{x}\frac{dy}{dt}, \quad \Rightarrow x \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}$$

记 $D = \dfrac{d}{dt}$,则 $Dy = \dfrac{dy}{dt}$ 上式换为 $xy' = Dy$

作变量变换 $x=e^t$ 或 $t=\ln x$, $Dy=\dfrac{dy}{dt}$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{x}\frac{dy}{dt} \Rightarrow xy'=Dy$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=-\frac{1}{x^2}\frac{dy}{dt}+\frac{1}{x}\cdot\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dt}\right)$$

$$=-\frac{1}{x^2}\frac{dy}{dt}+\frac{1}{x}\cdot\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dt}\right)\cdot\frac{dt}{dx}=-\frac{1}{x^2}\frac{dy}{dt}+\frac{1}{x^2}\frac{d^2y}{dt^2}$$

$$=\frac{1}{x^2}\left(\frac{d^2y}{dt^2}-\frac{dy}{dt}\right) \Rightarrow x^2y''=D^2y-Dy$$

$$x^n y^{(n)} + p_1 x^{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + p_{n-1} x y' + p_n y = f(x)$$

作变量变换 $x = e^t$ 或 $t = \ln x$, $Dy = \dfrac{dy}{dt}$

$xy' = Dy \qquad x^2 y'' = D(D-1)y$

$x^3 y''' = D(D-1)(D-2)y$

一般地, $x^k y^{(k)} = D(D-1)\cdots(D-k+1)y.$

将上式代入欧拉方程, 则化为以 $t$ 为自变量的常系数线性微分方程. 求出这个方程的解, 把 $t$ 换为 $\ln x$, 即得到原方程的解.

**例1 求解** $x^3y''' + x^2y'' - 4xy' = 3x^2$

**解** 作变量变换 $x = e^t$ 或 $t = \ln x$, 记 $D = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,t}$,

原方程化为

$$D(D-1)(D-2)y + D(D-1)y - 4Dy = 3e^{2t},$$

即

$$D^3y - 2D^2y - 3Dy = 3e^{2t},$$

或

$$\frac{d^3y}{dt^3} - 2\frac{d^2y}{dt^2} - 3\frac{dy}{dt} = 3e^{2t}. \qquad (1)$$

方程(1)所对应的齐次方程为

$$\frac{d^3y}{dt^3} - 2\frac{d^2y}{dt^2} - 3\frac{dy}{dt} = 0,$$

其特征方程 $r^3 - 2r^2 - 3r = 0,$

特征方程的根为 $r_1=0, r_2=-1, r_3=3.$

所以齐次方程的通解为

$$Y=C_1+C_2e^{-t}+C_3e^{3t}$$

设特解为 $y^*=be^{2t}=bx^2,$

代入原方程，得 $b=-\frac{1}{2}.$ 即 $y^*=-\frac{x^2}{2},$

所给欧拉方程的通解为 $y=C_1+\frac{C_2}{x}+C_3x^3-\frac{1}{2}x^2.$

---

例1 求解 $x^3y'''+x^2y''-4xy'=3x^2$

$$\frac{d^3y}{dt^3}-2\frac{d^2y}{dt^2}-3\frac{dy}{dt}=3e^{2t}. \Rightarrow r^3-2r^2-3r=0$$

例2. 求方程$x^2y''-2xy'+2y=\ln^2 x-2\ln x$的通解.

解：令 $x=e^t$, 则 $t=\ln x$, 记 $D=\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,t}$,则原方程化为

$$D(D-1)y-2Dy+2y=t^2-2t$$

即 $$(D^2-3D+2)y=t^2-2t$$

亦即 $$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}-3\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}+2y=t^2-2t \quad ①$$

特征方程 $r^2-3r+2=0$, 其根 $r_1=1, r_2=2$,

则①对应的齐次方程的通解为

$$Y=C_1e^t+C_2e^{2t}$$

设特解: $y^* = At^2 + Bt + C$

代入①确定系数, 得 $y^* = \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{2}t + \frac{1}{4}$

①的通解为 $y = C_1 e^t + C_2 e^{2t} + \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{2}t + \frac{1}{4}$

换回原变量, 得原方程通解为

$$y = C_1 x + C_2 x^2 + \frac{1}{2}\ln^2 x + \frac{1}{2}\ln x + \frac{1}{4}$$

---

**例2.** 求方程 $x^2 y'' - 2xy' + 2y = \ln^2 x - 2\ln x$ 的通解.

$$\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2} - 3\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} + 2y = t^2 - 2t \quad \Rightarrow r^2 - 3r + 2 = 0$$

$$\Rightarrow r_1 = 1, r_2 = 2$$